Tangrans Pitagóricos

Matemática: geometria

Role a página

Guia do Professor

SUMÁRIO

I - ÁREAS DE ENSINO E OBJETIVOS

II - PRÉ-REQUISITOS PARA A REALIZAÇÃO DAS ATIVIDADES

III - TEMPO PREVISTO PARA A REALIZAÇÃO DAS ATIVIDADES

IV - SOBRE A UTILIZAÇÃO DOS MATERIAIS

a) Comentários sobre os procedimentos na sala de aula.

b) Comentários sobre os procedimentos na sala de informática.

V - DICAS E COMENTÁRIOS

VI - ATIVIDADES COMPLEMENTARES OU DE AVALIAÇÃO

Início

Guia do Professor em PDF Avalie-nos!!!

I - ÁREAS DE ENSINO E OBJETIVOS

Topo

As tarefas aqui apresentadas são indicadas para o Ensino Médio e podem ser aplicadas para enriquecer os temas *Áreas e Semelhanças de Figuras*. Trata de relações de semelhança entre as medidas de superfícies de regiões quadradas, retangulares, triangulares, limitadas por paralelogramos e por outros polígonos, além de envolver as áreas do círculo e de outras formas circulares. São apresentados 4 jogos eletrônicos do tipo tangram modeladores de situações relacionadas ao Teorema de Pitágoras e um desafio didático de aplicação dos conceitos.

Os procedimentos são indicados para um laboratório de informática, sem a necessidade de se ter as peças concretas dos jogos para serem manipuladas.

Existe também uma coleção completa dessas atividades apresentadas como experimento educacional denominado *Jogos Pitagóricos Concretos e Virtuais*, no site da UFF. Ali são apresentadas as instruções para a construção dos jogos com material concreto de baixo custo, os quais são indicados para serem utilizadas principalmente com alunos portadores de deficiência visual.

Esse tópico é importante no estudo de geometria plana, pois envolve o reconhecimento de regularidades e diferenças entre formas geométricas, o qual é preparatório e facilitador à introdução das fórmulas.

Objetivos das atividades

O objetivo geral desses jogos é fazer com que o aluno compreenda a importância das relações de semelhança para a generalização do Teorema de Pitágoras, para o caso de quaisquer figuras planas semelhantes. Essa generalização é muito pouco conhecida, até mesmo por professores, isto é, são pouco conhecidas as relações quanto às áreas para o caso de figuras planas semelhantes, além das quadradas, quando justapostas a um triângulo retângulo. Essas são relações válidas, até mesmo no caso de poligonais quaisquer e de figuras curvas.

Resumidamente, os objetivos a se atingir com essas atividades são:

- Investigar e reconhecer polígonos semelhantes e algumas de suas relações mais importantes.
- Concluir e sintetizar argumentações, tomando como base os conhecimentos criados a partir de jogos.
- Utilizar a geometria para resolução de situações-problema.
- Saber utilizar as relações matemáticas para a expressão do saber físico.
- Operar quantitativamente os dados obtidos por meio da observação de figuras.

II - PRÉ-REQUISITOS PARA A REALIZAÇÃO DAS ATIVIDADES

Topo

Para que o educando alcance os objetivos propostos, espera-se o conhecimento apresentado a seguir:

- Reconhecer polígonos elementares (triângulos retângulos e isósceles, quadrado, retângulo, paralelogramo etc.), seus elementos (alturas, lados etc.) e suas áreas.
- Reconhecer círculos e circunferências, seus elementos e suas áreas.
- Saber trabalhar com polinômios do segundo grau.

III - TEMPO PREVISTO PARA A REALIZAÇÃO DAS ATIVIDADES

Topo

1 hora/aula.

IV - SOBRE A UTILIZAÇÃO DOS MATERIAIS

Topo

a) Comentários sobre os procedimentos na sala de aula

A apresentação do detalhamento do diálogo com o aluno é intencional e pode ser útil como auxílio ao professor(a) a fim de ajudá-lo a levar o aprendiz a visualizar as condições gráficas dos conceitos e relações envolvidos, a analisar suas propriedades e a organizá-las, primeiro de maneira informal e depois formalmente, por meio do desenvolvimento de fórmulas.

b) Comentários sobre os procedimentos na sala de informática

Apesar das tarefas serem autoinstrutivas, na sala de informática e durante a realização das tarefas, o professor(a) deve supervisionar o desenvolvimento do aluno, intervindo no procedimento apenas quando solicitado, pois esse deve ficar sob a responsabilidade do aluno por meio de sua interação com o computador.

V - DICAS E COMENTÁRIOS

Topo

Você, professor(a), conhece algum material concreto que ajude a desenvolver as noções ligadas ao Teorema de Pitágoras, como apresentados pelos jogos eletrônicos?

Você acha que o geoplano de rede quadriculada poderia ser utilizado com êxito pelos alunos, para tratar dos resultados relacionados ao Teorema de Pitágoras?

Se não conhece materiais didáticos concretos e tiver dúvidas, veja em Kaleff, Garcia & Rei (2002) e Kaleff (2008) sobre o uso do geoplano, de jogos e artefatos articulados modeladores que permitem realizar experimentos manipulativos.

Você conhecia os resultados sobre a generalização do Teorema de Pitágoras, como foram apresentados?

Esses resultados são interessantes e instigantes para o aluno, na medida em que mostram como figuras curvas podem ocupar uma mesma área que formas poligonais, apesar de nunca ser possível, por meio de recursos geométricos, ou seja, com régua e compasso, transformar uma forma curva em outra poligonal.

Observe que as atividades aqui apresentadas estão de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL-PCN, 2000), na medida em que uma das finalidades do ensino de Matemática no nível médio é levar o aluno a expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas, bem como a valorizar a precisão da linguagem e, até mesmo realizar demonstrações. O guia complementar dos PCN coloca ainda que, para se alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno, é necessário que, ainda no ensino médio, se busque o aprofundamento das ideias e procedimentos. Isto é apontado como desejável, no âmbito de fatos familiares ao estudante e no sentido de que venha a tomar conhecimento do que seja um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas, bem como, até mesmo o valor de uma demonstração.

O *método de aproximação por exaustão e o* Teorema de Pitágoras para figuras semelhantes em geral.

Embora você professor(a), deva ter notado que, nas atividades tenham sido tratadas pequenas demonstrações, como no caso do teorema de Pitágoras com triângulos e realizada na Atividade 2, também foi abordada, e não demonstrada, a validade do teorema de Pitágoras para figuras semelhantes em geral. Se quiser conhecer uma demonstração desse resultado veja Rosa (1983) e Tomei (2003). O primeiro autor apresenta um procedimento no qual utiliza relações de semelhanças a partir daquela demonstrada para o teorema de Pitágoras com triângulos, recorrendo a uma interessante argumentação algébrica devida ao matemático George Polya. No entanto, a apresentação de Tomei é mais intuitiva e geométrica, por recorrer a uma técnica de aproximação de curvas, criada por Eudóxo e conhecida desde o tempo da antiga Grécia (cerca de 300 a. C) como *método de aproximação por exaustão*.

Carlos Tomei apresenta um esboço da demonstração da generalização do teorema argumentando que, uma vez que se tenha provado o teorema de Pitágoras para quadrados, então, por meio da técnica de exaustão, é possível se demonstrar o teorema para figuras mais gerais. Tal argumentação pode ser ilustrada, por exemplo, para o caso da elipse, como se apresenta a seguir.

Apoiando-se três elipses sobre os três lados de um triângulo retângulo, é possível aproximar cada uma dessas três curvas por uma grande variedade de quadrados e retângulos semelhantes cujos lados são proporcionais aos do triângulo. Lembre-se de que, para tais polígonos, a relação algébrica entre a medida dos lados e da hipotenusa, apresentada no teorema, continua sendo verdadeira! Ou seja, se **a** é o valor da medida da hipotenusa e **b** e **c** os dos catetos, para os quais valem a relação, então esta também é válida para qualquer múltiplo desses valores: **ka, kb, kc**, sendo **k** um número real qualquer. Por essa razão, considera-se que os quadrados e retângulos semelhantes aproximam-

se por "dentro" das curvas, quando eles estão totalmente contidos no interior de cada elipse, ou por "fora" delas, quando cobrem o interior e cada uma dessas curvas. Escolhem-se esses retângulos e quadrados bem pequenos, sendo que, as somas das áreas desses polígonos fornecem dois valores aproximados (por "falta" ou por "excesso") para as áreas das elipses. Considerando-se o teorema de Pitágoras para quadrados e retângulos (diminuindo, portanto, os seus lados), tem-se que a soma das áreas de todos esses polígonos associados à hipotenusa é igual à soma daqueles associados aos dois catetos. Aumentando-se o número de quadrados e retângulos, os valores das somas (por "falta" ou por "excesso") aproximam-se cada vez mais. Devido a essa aproximação, pode-se intuitivamente tomar a sua igualdade (no limite) e obter-se o teorema de Pitágoras para elipses.

Para ressaltar a importância dessa técnica, que pode ser aplicada a figuras semelhantes formadas por linhas poligonais e curvas, cabe lembrar que ela é considerada precursora das teorias matemáticas modernas que tratam do cálculo de áreas.

Você sabia que alguns livros didáticos para o ensino médio já apresentam exercícios de cálculos aproximados de áreas de figuras curvas fazendo uso de papel quadriculado? Por exemplo, Dante (2004) trabalha as noções de área por *falta* e por *excesso,* no entanto, não chega a explorar técnicas que possibilitem ao aluno vivenciar alguma diminuição dos quadradinhos da rede.

Uma curiosidade: sabia que existem documentos que revelam que o próprio Euclides, o criador da Geometria Euclidiana, também usou tais argumentos de exaustão para obter uma fórmula para π (pi)?

Referências

- DANTE L. R. *Matemática - Contexto & Aplicação,* Volume 2, 1ª ed., Primeira Impressão. São Paulo: Ática. 2003, 238-239.
- KALEFF, A.M. T*ópicos em Ensino de Geometria: A Sala de Aula Frente ao Laboratório de Ensino e à Historia da Geometria*. Rio de Janeiro: UAB/UFF/CEDERJ. 2008.
- KALEFF, A. M.; GARCIA, S.S; REI, D.M. *Jogos Geométricos e Formas Planas*, 3ª ed., Niterói: EdUFF. 2002.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática* Ensino Médio. Brasília: MEC/SEMT 2000. Acessado em 01/09/2008.
- ROSA, E. (1983) Mania de Pitágoras. *Revista Professor de Matemática - SBM,*. v. 2, 14-22
- SANTOS, C. H. & IMENES, L. M. P. Tangram: Um Antigo Jogo Chinês nas Aulas de Matemática. *Revista de Ensino de Geometria*. 1967.
- TOMEI, C. *Euclides: a Conquista do Espaço*. São Paulo: Odysseus. 2003.

Para saber mais

- Site do Laboratório de Ensino de Geometria da UFF (LEG). Contem uma coleção de fotos e artigos relacionados aos materiais concretos produzidos no LEG.
- Portal educacional do estado do Paraná. **Secretaria de Estado da Educação do Paraná**. Contem uma coleção de atividades, artigos, teses e materiais didáticos para o ensino básico.
- Um site muito interessante sobre Matemática e Arte.

VI - ATIVIDADES COMPLEMENTARES OU DE AVALIAÇÃO

Topo

- Após realizar as atividades, pode-se sugerir aos alunos que escrevam um relatório explicando os procedimentos realizados, descrevendo detalhadamente as facilidades e dificuldades apresentadas. A partir dos relatórios individuais, pode-se avaliar a capacidade de argumentação, a lógica de raciocínio, a

compreensão correta dos conceitos envolvidos, a organização, a descrição do método utilizado e, ainda, os resultados obtidos.

- Pode-se propor que os alunos construam mais dois tangrans bem simples para modelarem a mesma situação geométrica, utilizando papel-cartão ou emborrachado fino.

Essa tarefa deverá ser realizada em dois grupos de alunos e com divisão das ações a serem desenvolvidas: um grupo fica responsável pela elaboração e confecção das peças de um de tangrans, o outro pela elaboração dos procedimentos para as atividades.

Finalmente, os dois grupos devem trocar as ações para a elaboração e para a confecção do material referente ao outro jogo.

- Essa tarefa de confecção de jogos, também possibilita um vínculo interdisciplinar, pois em conjunto com um professor(a) de Português, este poderá contribuir na elaboração da redação das atividades. Para o professor (a) que tem experiência com geometria dinâmica sugere-se que desenvolva um dos jogos criados pelos alunos no ambiente C.a.R. (Régua e Compasso).

Essa ação permite um excelente exercício de aproximação colaborativa entre professor(a) e aluno, cooperando para o bom andamento dos trabalhos didáticos e para a autoestima do grupo de alunos que criou o respectivo tangram.

Responsável:	Ana Maria Martensen Roland Kaleff.
Idealização:	Ana Maria Martensen Roland Kaleff e Bárbara Gomes Votto.
Programação:	Carol Cruz de Carvalho, Erick Baptista Passos, Manoel Mariano Siqueira Junior, Rafael Machado Alves e Wagner Luiz Oliveira dos Santos.
Revisão:	Anne Michelle Dysman Gomes.

Elaborado no LEG - Laboratório de Ensino de Geometria da Universidade Federal Fluminense.

Tangrans Pitagóricos Versão 20/03/2010
Possíveis atualizações e extensões desta atividade estarão disponíveis no endereço http://www.uff.br/cdme/.
Site alternativo: http://www.cdme.im-uff.mat.br.

Dúvidas? Sugestões? Nós damos suporte! Contacte-nos pelo e-mail:
conteudosdigitais@im.uff.br.